Določanje geoida (kvazigeoida)

- Določanje geoida (kvazigeoida) pomeni določanje oblike Zemlje oz. izračun ene določene nivojske ploskve Zemljinega težnostnega polja.
- Iščemo odgovor na vprašanje:
  - Ali lahko določimo težnostno polje Zemlje v zunanjem prostoru brez poznavanja razporeda gostote v njeni notranjosti, samo z znanim potencialom na robu območja (površje Zemlje)?
  - Matematično → reševanje problema robnega pogoja (PRP) parcialnih diferencialnih enačb:
    - Laplaceova d.e. $\Delta V = 0$ ($\Delta W = -2\omega^2$) → zunanji PRP;
    - Poissonova d.e. $\Delta V = -4\pi G\rho$ ($\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2$) → notranji PRP.
- V splošnem je pri reševanju znana robna ploskev S, vendar pri reševanju geodetskega problema robnih pogojev (GPRP) robne ploskve S ne poznamo.

Geodetski problem robnih pogojev

- Geodetic boundary value problem (GBVP):
  - Gre za t.i prosti GPRP, kjer poleg geometrije robne ploskve S, moramo določiti tudi potencial W. Pri določitvi geoida nas dejansko zanima samo S.
  - Robne pogoje nam tu določa zvezna robna funkcija – težnostni potencial (W). Ker potenciala ne moremo neposredno izmeriti, ga predstavimo s količinami, ki se dajo neposredno izmeriti.
  - Te količine so ali t.i. anomalijske količine težnostnega polja, ali t.i. moteče količine težnostnega polja.
    - anomalije težnosti (moteča težnost), odkloni navpičnice (Helmertovi ali Pizzetijevi), ter geoidne višine (anomalije višin, kvazigeoidne višine).
  - Vse te količine se lahko izrazijo v linearni obliki kot odvodi motečega potenciala T.
  - Omenjene merjene količine podajajo robne pogoje, katerih rešitev je ploskev - približna oblika Zemlje.

Pristopi k reševanju GPRP

- Dva pristopa k reševanju geodetskega problema robnih pogojev:
  - klasični → rešitev je geoid.
  - pristop po Molodenskem → rešitev je kvazigeoid.

- V grobem se pristopa ločita glede na redukcijo merjenih količin. Pri klasičnem pristopu merjene količine reduciramo na ničelno nivojsko ploskev (W_0 = konst.) in rešitev je geoid. V nasprotnem primeru, če uporabimo merjene količine takšne kot so (na fizični površini Zemlje) je rešitev kvazigeoid.
- Pri geoidu so "merjene količine" anomalijske količine, pri kvazigeoidu pa so to "moteče količine". V prvem primeru moramo upoštevati določene pogoje. Redukcija merjenih količin na geoid predpostavlja uvajanje hipotez o gostoti mas znotraj Zemlje. Poleg tega pomeni redukcija na geoid, da zunaj robne ploskve - geoida ni nobenih motečih mas (atmosfera in topografija).
- Pristop po Molodenskem ne terja nobenih hipotez o razporeditvi gostote, kot tudi ni potrebno opraviti nobenih redukcij merjenih količin. Je pa ta postopek mnogo bolj zapleten.

Rezultat izračuna geoida

- Končni rezultat izračuna geoida je določena oblika in velikost geoida (kvazigeoida) glede na izbrano referenčno ploskev elipsoida.
- Zaradi nepravilne razporeditve mas Zemlje je geoid nepravilne oblike in ni skladen z nobeno geometrijsko ploskvijo.
- V prostorskem smislu povezujejo geoid (kvazigeoid) in izbrani referenčni elipsoid geoidne višine (kvazigeoidne višine oz. anomalije višin). To so odstopanja pravilne oblike elipsoida od nepravilne oblike geoida (kvazigeoida).
- Izračunane geoidne višine (anomalije višin) so, kot v primer u odklonov navpičnice, lahko relativne oz. absolutne.
  - Absolutne se nanašajo na absolutni geocentrični elipsoid Zemlje, kot sta GRS 80 in WGS 84. Relativne geoidne višine se nanašajo na relativne referenčne elipsoide (Bessel, Hayford, Krasovski...)

Vrste podatkov za določitev geoida (kvazigeoida)

- Meritve težnosti → Δg (δg).
- Astronomske meritve - astronomske geografske koordinate (Φ, Λ) → komponente odklona navpičnice.
- Koordinate točk, določene z izmero GNSS (ϕ, λ, h) → ($N = h - H$) ($\zeta = h - H^N$).
- Opazovanja do umetnih zemljinih satelitov in med njimi → geopotencialni model.
- Meritve satelitske altimetrije → Δg na oceanih.

Metode izračuna geoida (kvazigeoida)

- Razvrstitev glede uporabljenih podatkov:
  - gravimetrične;
  - astrogeodetske;
  - satelitske metode.
- Integrirani pristop k določitvi geoida:
  - uporabimo vse, kar imamo na razpolago.

- Vse sodobne metode upoštevajo tri vrste (skupine) podatkov:
  - globalni geopotencialni model;
  - terestrični podatki (težnost, odkloni na kopnem, altimetrija na oceanih);
  - podatki o topografiji (DMV).

Sodobni pristop k določitvi geoida

- Pri sodobnih metodah določitve geoida se uporabljajo tehnike spektralne analize.
- Količine, ki so vhodni podatki za računanje geoida se obravnavajo kot fizikalen pojav (zapis) z ustreznim spreminjanjem (fluktuacijo) v prostoru oz. času. Pogostnost ali fluktuacija je t.i. frekvenca oz. valovna dolžina in ima mnogo večjo vlogo, kot prostorske (časovne) koordinate pojava.
- S tehnikami spektralne analize je možno dani pojav transformirati v frekvenčno oz. spektralno domeno samo z preureditvijo danih podatkov.

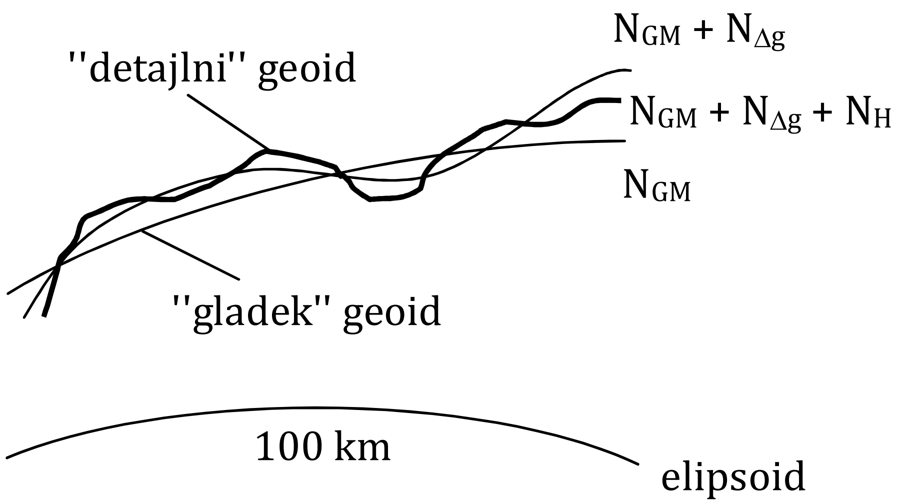
- Transformacija prostorskega oz. časovnega zapisa se v frekvenčni domeni imenuje spekter ("spectrum").

Spekter težnostnega polja Zemlje (1)

- V našem primeru obravnavamo geoid (globalni) kot popolni spekter težnostnega polja Zemlje, ki ga lahko razčlenimo na štiri frekvenčne dele: nizki, srednji, visoki (in zelo visoki).
- Tako so tudi podatki razdeljeni glede na to, kakšen vpliv imajo na celotno geoidno višino (celotni spekter težnostnega polja Zemlje).
  - Terminologijo smo si sposodili iz teorije digitalne obdelave signalov, zato se tudi iskana geoidna višina obravnava kot signal.

Spekter težnostnega polja Zemlje (2)

- Prispevek posameznih vrst podatkov k spektru težnostnega polja Zemlje:



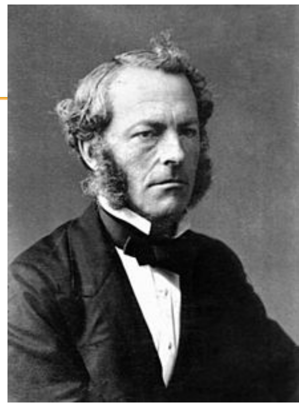
Dinamične satelitske metode

- S sledenjem pravilnosti tirov gibanja satelitov, ki krožijo okoli Zemlje na nižjih višinah, je možno določiti model za zemeljski gravitacijski potencial.

$$N = \left(\frac{GM}{a_e\gamma}\right)\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_{nm}(\cos\theta)(\Delta C_{nm}\cos m\lambda + \Delta S_{nm}\sin m\lambda)$$

- Globalni geopotencialni modeli (terestr. podatki tudi z območja SLO) :
  - EGM96 (Earth Gravitational Model 1996);
  - EGM08 (Earth Gravitational Model 2008).

Gravimetrična metoda

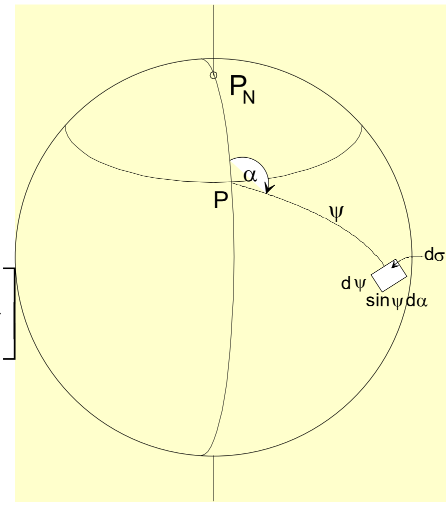


- Določanje ploskve geoida s pomočjo gravimetričnih podatkov predstavlja matematično reševanje problema geodetskega robnega pogoja.
- George Gabriel Stokes (l. 1849) - Stokesova enačba:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma} S(\psi)\Delta g d\sigma$$

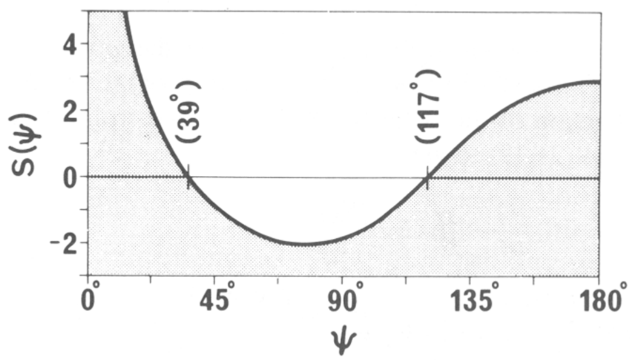
- kjer je ψ sferna razdalja med ploščinskim elementom $d\sigma$ in točko izračuna P. R je radij krogle na kateri se točka nahaja, γ je normalna težnost na krogli.
  $S(\psi)$ je Stokesova funkcija:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi \ln\left[\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right]$$



Gravimetrična metoda (2)

- Stokesova funkcija $S(\psi)$ je odvisna samo od sferne razdalje ψ med točko izračuna P in ploščinskim elementom $d\sigma$. Lahko jo obravnavamo kot "utež" k anomaliji težnosti (moteči težnosti).



- Integracija v enačbi velja za celotno območje Zemlje. Zahteva je torej, da so znane vrednosti anomalij (motečih t.) v celotnem območju integracije oz. v vsaki točki geoida (površja Zemlje).
- Rešitev enačbe otežujejo v praksi nekateri pogoji: vrednosti Δg so podane na geoidu; geoid je krogla (s polmerom R); zunaj geoida ni motečih mas (atmosfera in topografija). Vse naštete pogoje lahko upoštevamo z uvedbo ustreznih popravkov oz. z ustrezno redukcijo merskih podatkov.

Gravimetrična metoda (3)

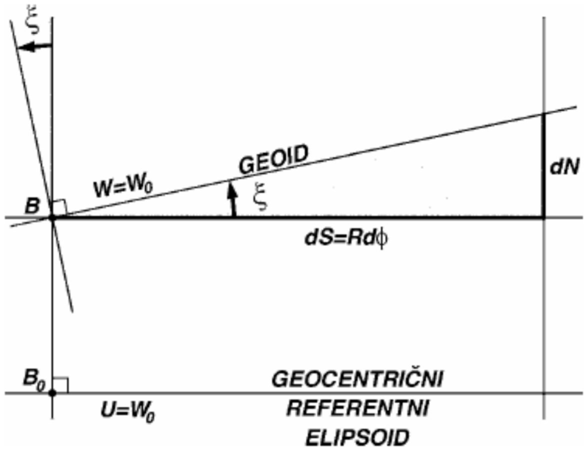
- Pristop k rešitvi geodetskega robnega pogoja po Molodenskem je drugačen. Tu namesto Δg na geoidu upoštevamo vrednosti moteče težnosti δg na zemeljskem površju. Rezultat integracije so, namesto geoidnih višin, ustrezne "kvazigeoidne" oz. anomalije višine ζ.

- Pri praktičnem računanju se Stokesov integral računa z eno od metod numerične integracije, ali pa s pomočjo hitre Fourierove transformacije (FFT). Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo kolokacije po metodi najmanjših kvadratov.

Astrogeodetska metoda (1)

- Odklon navpičnice je dejansko naklon geoidne ravnine glede na elipsoid v točki obravnave. V smeri meridiana in prvega vertikala je zveza naslednja (odvajamo na geoidu):

$$\xi = -\frac{dN}{ds_\phi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \phi}, \qquad \eta = -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R\cos\phi}\frac{\partial N}{\partial \lambda}$$



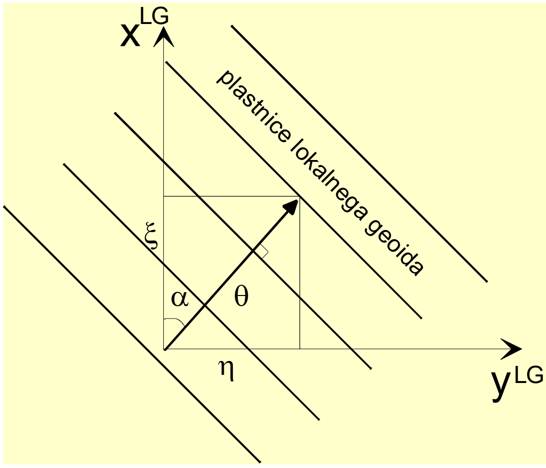
R je tukaj srednji polmer Zemlje. Za pravilno ovrednotenje zgornjih enačb moramo poznati odklone na geoidu, torej moramo izmerjene astronomske koordinate reducirati na geoid za vpliv ukrivljenosti težiščnice. Negativni znak je skladno z dogovorom o predznakih komponent odklona.

Identična enačba povezuje komponente odklona po Molodenskem in kvazigeoidno višino ζ, s to razliko, da so odvodi določeni na površju Zemlje.

Astrogeodetska metoda (2)

- Z uvedbo Brunsove enačbe dobimo zvezo med motečim potencialom in komponentami odklona navpičnice:

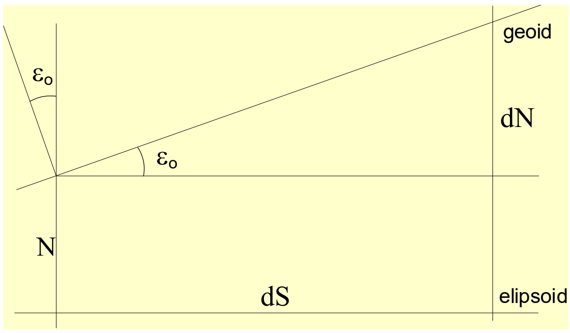
$$\xi = \frac{T}{R\gamma_0^2}\frac{\partial\gamma_0}{\partial\phi} - \frac{1}{R\gamma_0}\frac{\partial T}{\partial\phi}, \qquad \eta = -\frac{1}{R\gamma_0\cos\phi}\frac{\partial T}{\partial\lambda}$$



- Če zanemarimo vpliv ukrivljenosti težiščnice vidimo, da nam astron. geografske koord. (Φ, Λ) ter geodetske koordinate (ϕ, λ) v neki točki zemeljske površine dajo vse osnovne informacije o nagibu ploskve geoida v tej točki:
  + smer odklona navpičnice sovpada s smerjo največjega naklona (gradienta) geoidne ploskve;
  + velikost odklona ustreza samemu gradientu.

Astronomski nivelman

- Iz izmerjenih komponent odklona lahko pridobimo vrednosti razlik geoidnih višin. Helmertova enačba daje zvezo med odklonom navpičnice ε_0 na geoidu in prirastkom geoidne višine $\mathrm{d}N$ na odseku razdalje $\mathrm{d}S$:
  + $dN = -\varepsilon_0\, dS.$

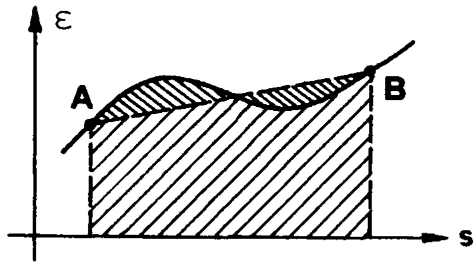


- Z integracijo zgornje enačbe je možno določiti potek ploskve geoida med dvema točkama:

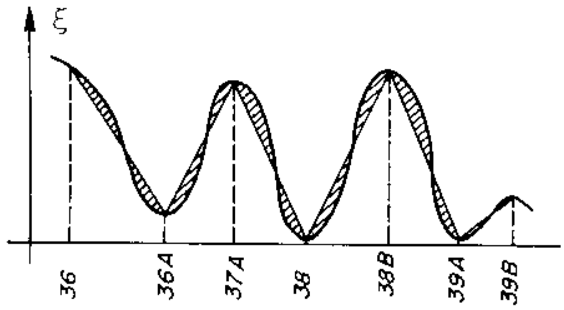
$$\Delta N_{12} = N_2 - N_1 = -\int_1^2 \varepsilon_0 dS = -\int_1^2 (\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) dS$$

Astronomski nivelman - geoidni profil

- Če odklone ε_0 prikažemo grafično kot funkcije poti (razdalje S), ustreza vrednost integrala ploščini pod krivuljo $\varepsilon_0 = f(S)$.



- Geoidni profil med dvema točkama:
  - $\Delta N_{AB} = -½\ (\varepsilon_A + \varepsilon_B)\Delta s$
- Geoidni profil med dvema danima točkama lahko aproksimiramo s premico.
- V primeru, da je ploščina trapeza enaka ploščini pod krivuljo, je aproksimirana geodina višinska enaka točnemu izrazu z integralom.
- Če so točke na profilu izbrane tako, da nam tetiva v najboljši možni meri aproksimira potek geoidne ploskve, se vpliv sistematičnih pogreškov izniči, saj so te porazdeljene enakomerno pozitivno in negativno.



Astronomski nivelman - računanje v mreži

- Posamezne razlike geoidnih višin med točkami izračunamo:

$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2\rho''}\left[(\xi_i + \xi_k)(\phi_k - \phi_i)M + (\eta_i + \eta_k)(\lambda_k - \lambda_i)N\cos\phi_m\right]$$

lahko računamo v ravnini kartografske projekcije ($y = e$, oz. $x = n$):

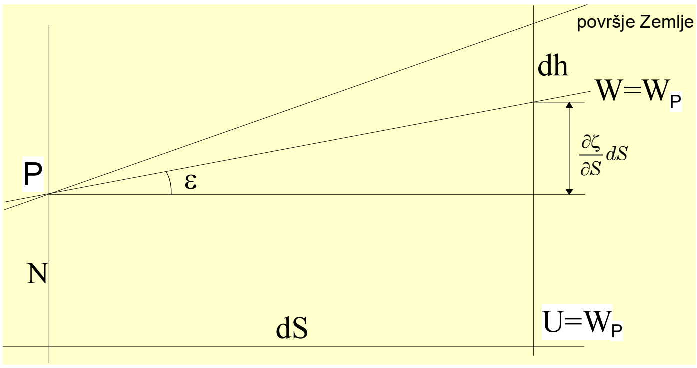
$$\Delta N_{ik} = -\frac{1}{2\rho''}\left[(\xi_i + \xi_k)(x_k - x_i) + (\eta_i + \eta_k)(y_k - y_i)\right]$$

- Če privzamemo geoidno višino ene točke kot dano, lahko izravnamo razlike geoidnih višin v mreži:
  - enačba opazovanj: $\Delta N_{ik} = N_k - N_i$,
  - enačba popravkov: $v_{ik} + \delta N_i - \delta N_k = N^0{}_k - N^0{}_i - \Delta N_{ik}$.

Astronomski nivelman po Molodenskem

- Helmertova enačba za astronomski nivelman se v primeru kvazigeoida in anomalij višin glasi:

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial S} dS + \frac{\partial \zeta}{\partial h} dh$$



- Zemljino površje ni nivojska ploskev, zato imamo v enačbi poleg horizontalnega člena še višinski člen. Prisoten je zaradi spremembe višine med točkama in je običajno manjši od horizontalnega člena.

Geometrijska satelitska metoda

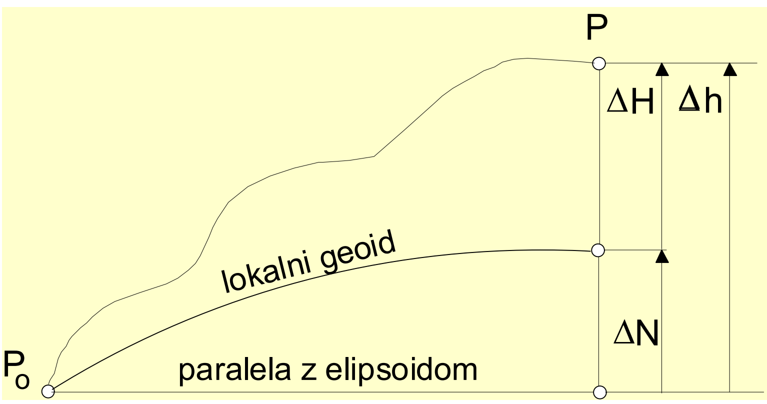
- Znana tudi kot metoda satelitsko določenih koordinat točk na Zemlji. V točkah z opravljenimi meritvami GNSS lahko določimo nadmorsko višino:

$$N = h - H$$

$$(\zeta = h - H^N)$$

- Zveza se lahko predstavi tudi v obliki razlik višin:

$$\Delta N = \Delta h - \Delta H$$



Lokalni geoid

- Na manjšem območju lahko potek lokalne geoidne ploskve predstavimo z regresijsko ploskvijo:

$$N = N\,(y,x) \text{ oz. } N = N\,(e,n)$$

- spremenljivki y in x sta ravninski koordinati točk v mreži. Običajno se koordinate podajajo v lokalnem koordinatnem sistemu (lahko tudi v državnem koord. sistem).
- Funkcija $N\,(y,x)$ predstavlja regresijsko (interpolacijsko) ploskev, določeno s številom točk z znanimi geoidnimi višinami.
- Primer, ravnina:

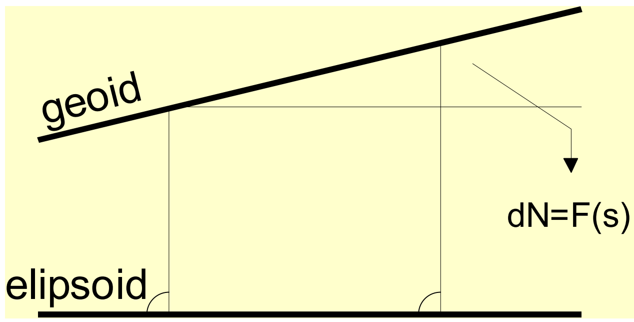
$$N\,(y,x) = C + Ay + Bx$$

- Če se spremenljivki y,x nanašata na težišče mreže, imajo koeficienti polinoma ustrezno geometrijsko pojasnitev.

Lokalni geoid - ravnina

$$N\,(y,x) = C + Ay + Bx$$

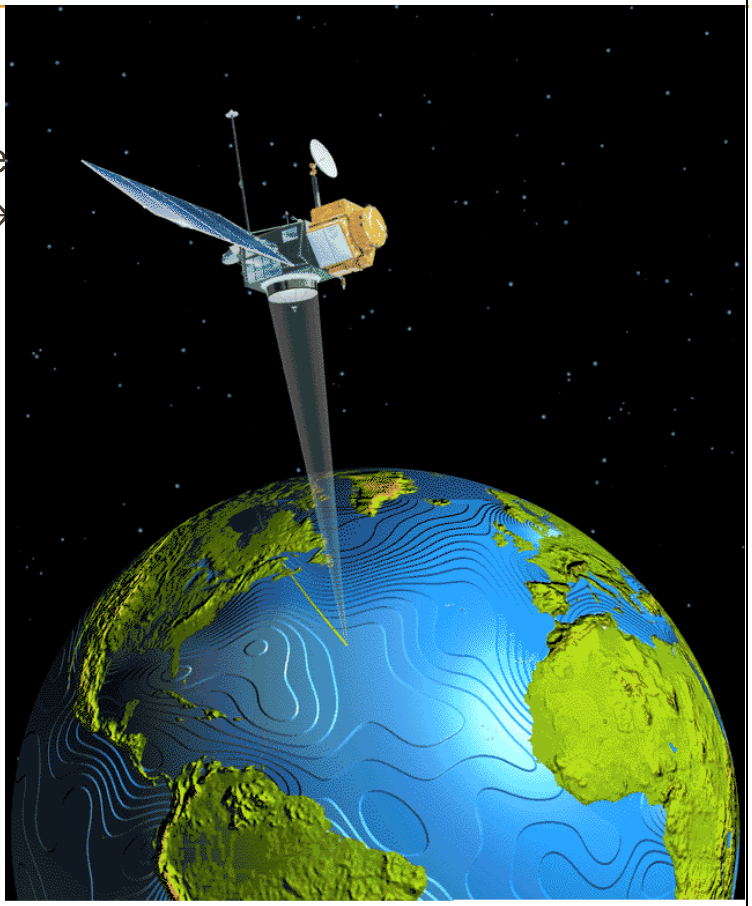
- Koeficient C predstavlja vzporedni odmik elipsoida od geoida.
- Linearna člena polinoma s koeficientoma A in B predstavljata razliko naklona tangentne ravnine na elipsoid in ustrezne geoidne ploskve v težiščni točki, in to v smeri koordinatnih smeri (A naklon vzhod – zahod, B naklon sever – jug).
- Smerni kot, ki ga določata koeficienta A in B, nam poda tudi smer največjega naklona ploskve lokalnega geoida.
- Če se omejimo samo na tri linearne člene predpostavimo, da imata obe ploskvi enako ukrivljenost, vendar sta medsebojno nagnjeni pod določenim kotom.



- Če obstaja večje število danih višinskih točk, je možno izračunati predoločeno rešitev s pomočjo metode najmanjših kvadratov.

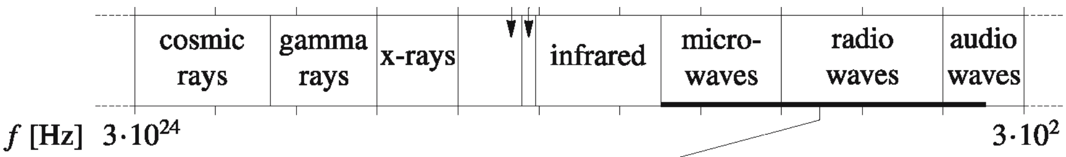
Satelitska altimetrija

- Tehnika satelitske geodezije, ki omogoča določietv srednje morske gladine nad oceanskimi območji → geoid na morju.
- Razvoj začel v 60-tih letih in še vedno traja.



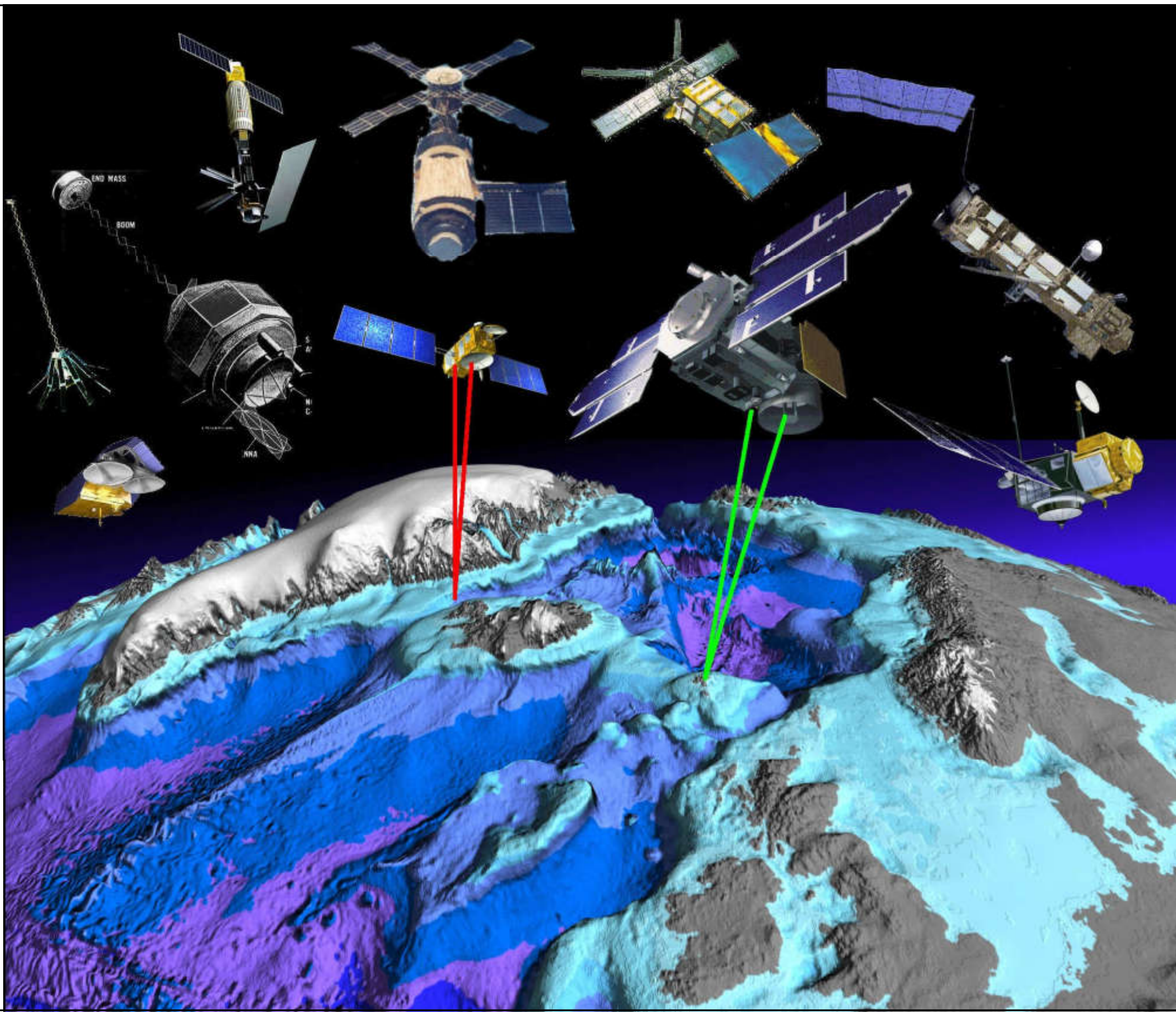
Frekvenčni pas

- Mikrometrsko področje EMV (2 - 18 GHz):
  - fr. pas omogoča lažje ločevanje odboja signala od naravnega sevanja morske gladine.

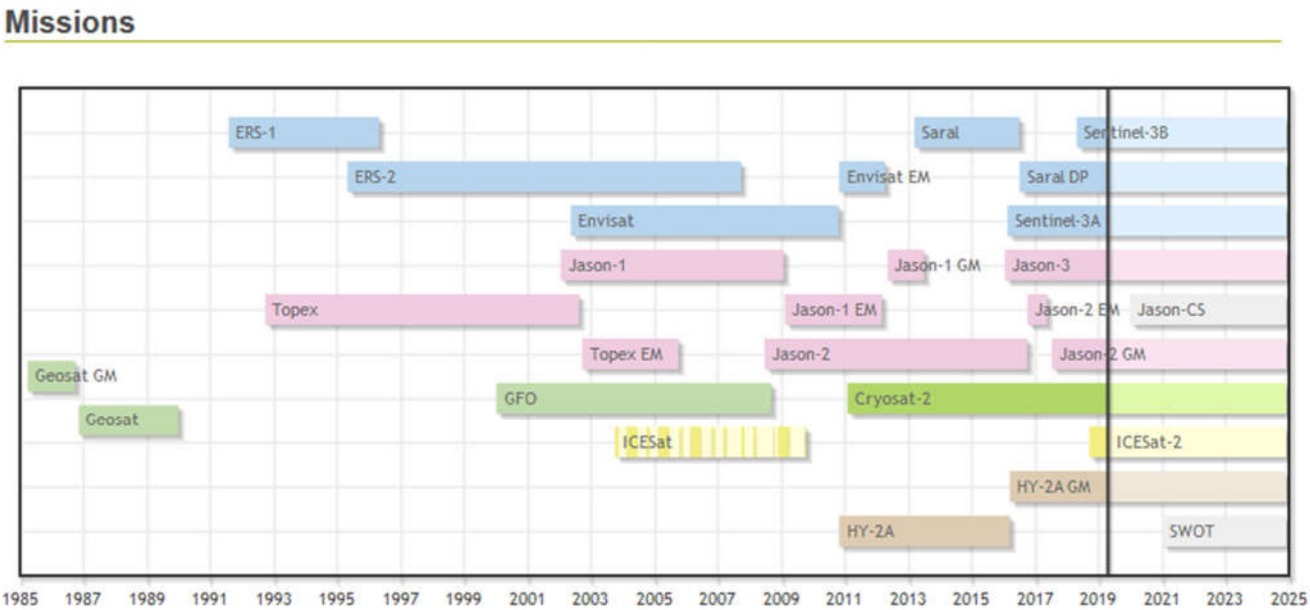


Notation	Wavelength λ	Frequency f
Extremely high frequency (EHF)	0.1–1 cm	300–30 GHz
Super high frequency (SHF)	1–10 cm	30–3 GHz
Ultra high frequency (UHF)	10–100 cm	3–0.3 GHz
Very high frequency (VHF)	1–10 m	300–30 MHz
High frequency (HF)	10–100 m	30–3 MHz
Medium frequency (MF)	0.1–1 km	3–0.3 MHz
Low frequency (LF)	1–10 km	300–30 kHz
Very low frequency (VLF)	10–100 km	30–3 kHz

Band	f [GHz]
K	26.5–18
Ku	18–12.4
X	12.4–8
C	8–4
S	4–2
L	2–1



Misije sat. altimetrije



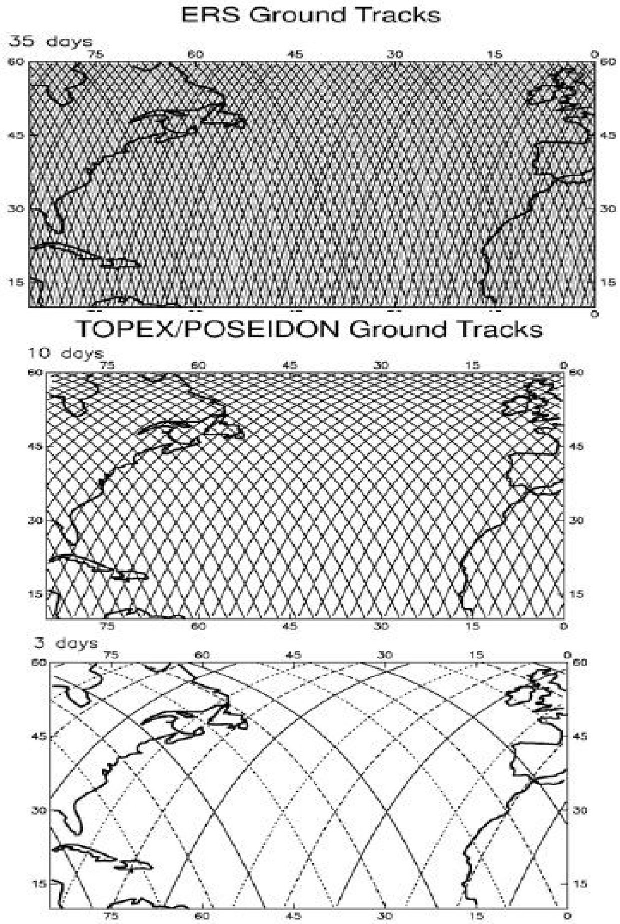
Mission	Operational	accuracy	cycle/d	altitude/km
Skylab	1973 9 month	100 m		435
GEOS-3	1975-1978	1-2 m	30 days	840
SEASAT	1978 3 month	10 cm		762
GEOSAT	1986-90	5 cm		800
Topex/Poseidon	1992 - present	< 5 cm	9,9	1337
ERS-1	1991 - 2000	5 cm	35, 163	780
ERS-2	1995 - 2003	5 cm	35	780
GFO-1	1998 - present	5 cm		800
Jason-1	Dec 2001 - pres.	< 5 cm	9,9	1337
ENVISAT	Mar 2002 - pres.	< 5 cm	35	796
Cryosat	Sep 2004		369	720
MGS Mars	1996-2000	2-30 m		378
ICESat Earth	Jan 2003 - present	< 10 cm	8, 91	600
SELENE Moon	Sep 2004	5 m		100 km

Izvor signala radar ali laser?

- Radarska altimetrija:
  - velikost odtisa 2 - 20 km,
  - vertikalna natančnost < 5 cm,
  - neodvisnost od vremena,
  - robustna tehnologija,
  - dolgo delujoča,
  - deluje na večini alt. misij,
  - odboj od vode in ledu.
- Laserska altimetrija:
  - velikost odtisa 40 - 70 m,
  - vertikalna natančnsot < 10 cm,
  - odvisnost od vremena (oblaki),
  - energetsko potratna tehnologija, ni robustna,
  - za kratke misije,
  - deluje na ICESat, Mars Explorer, SELENE,
  - odboj od vode, ledu, tal.

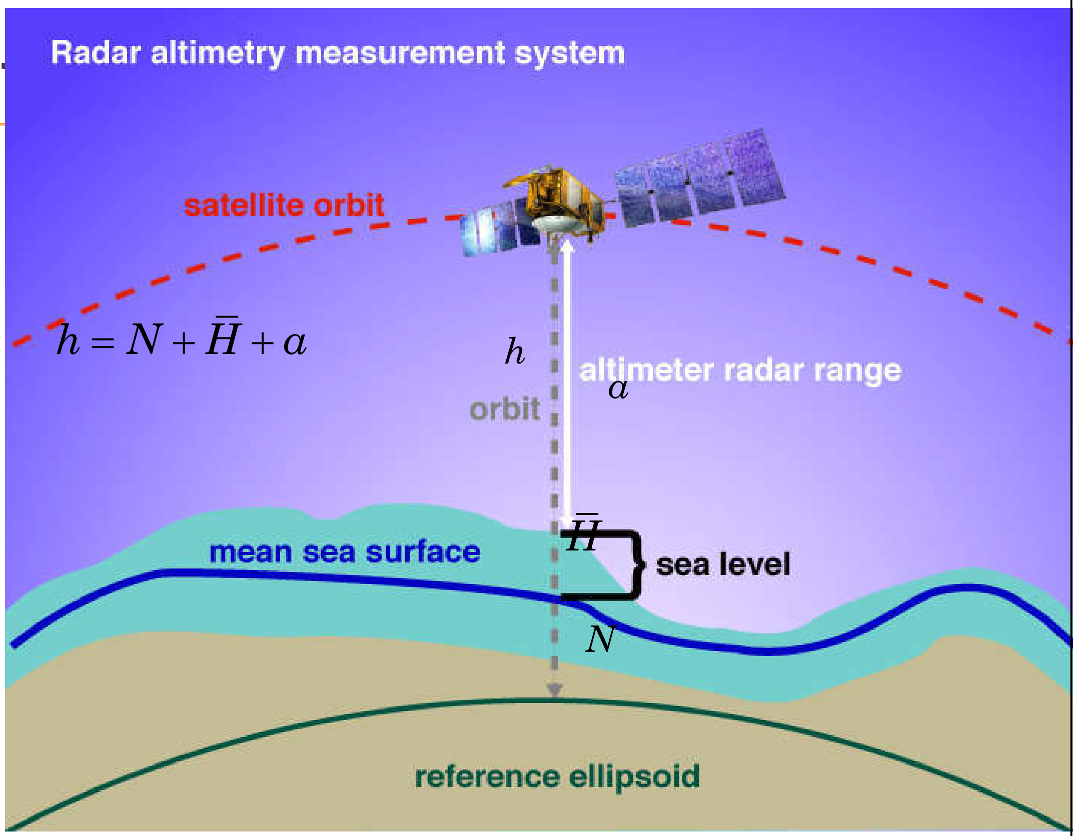
Projekcije tirnic

- Kompromis med prostorsko in časovno ločljivostjo:
  - raziskave statičnih pojavov terjajo dobro prostorsko ločljivost (anomalije težnosti na morju);
  - raziskave dinamičnih pojavov terjajo dobro časovno ločljivost (oceanski, morski tokovi).



Princip merjen

$$h = N + \bar{H} + a$$



višina satelita nad srednjo trenutno morsko gladino (a);

višina satelita nad elipsoidom (h);

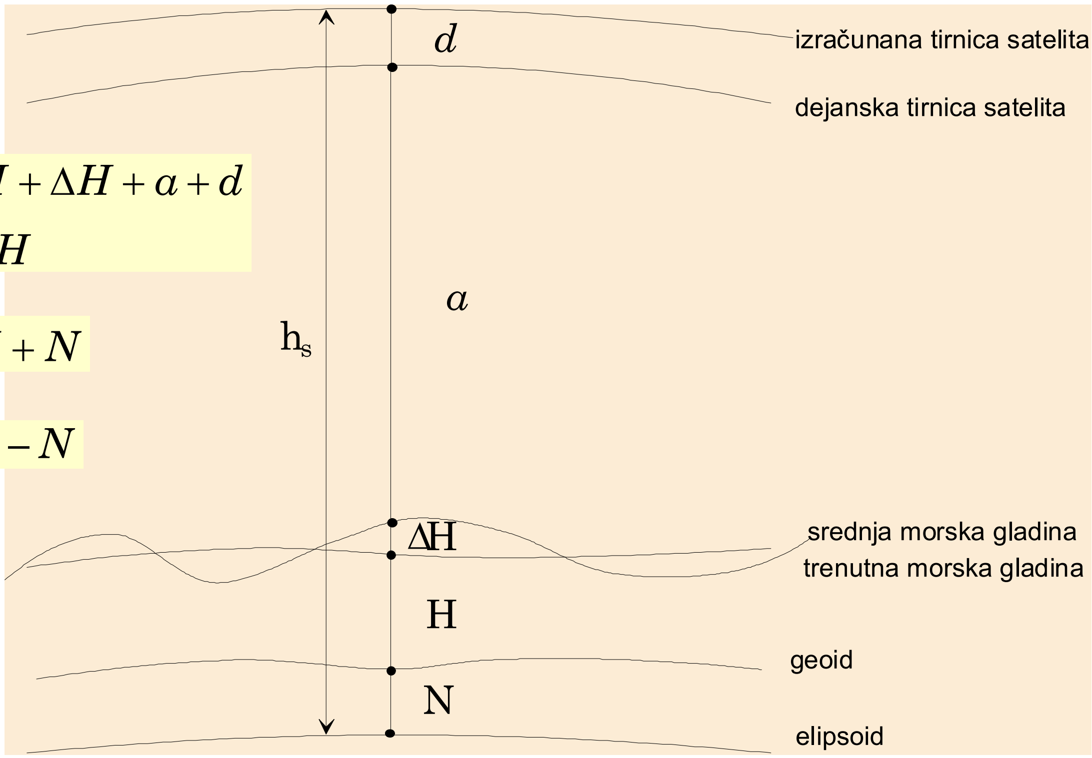
razlika med srednjo trenutno morsko gladino ($\bar{H}$) in geoidno višino N.

Podrobneje

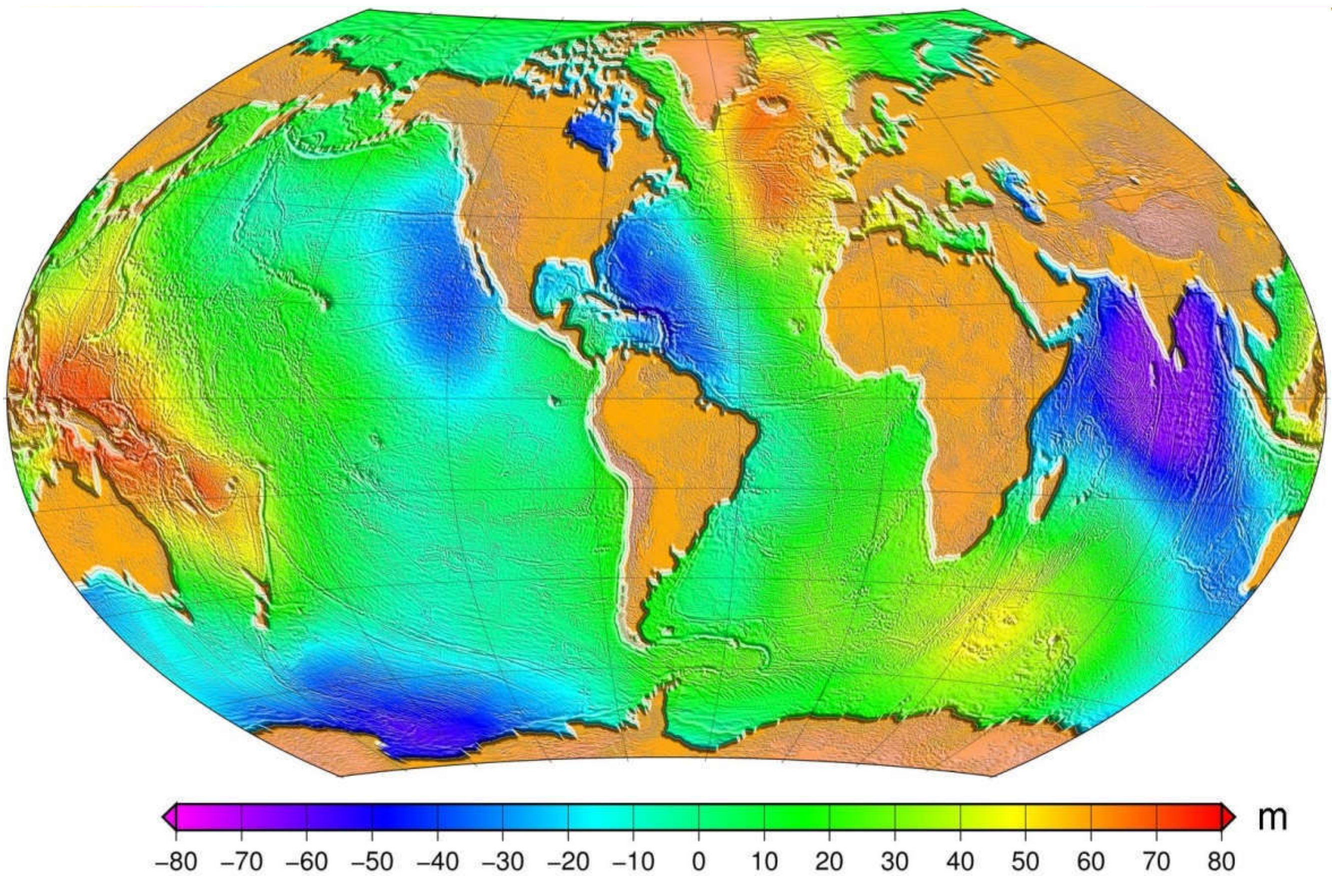
$$h_S = N + H + \Delta H + a + d$$
$$\bar{H} = H + \Delta H$$

$$SSH = \bar{H} + N$$

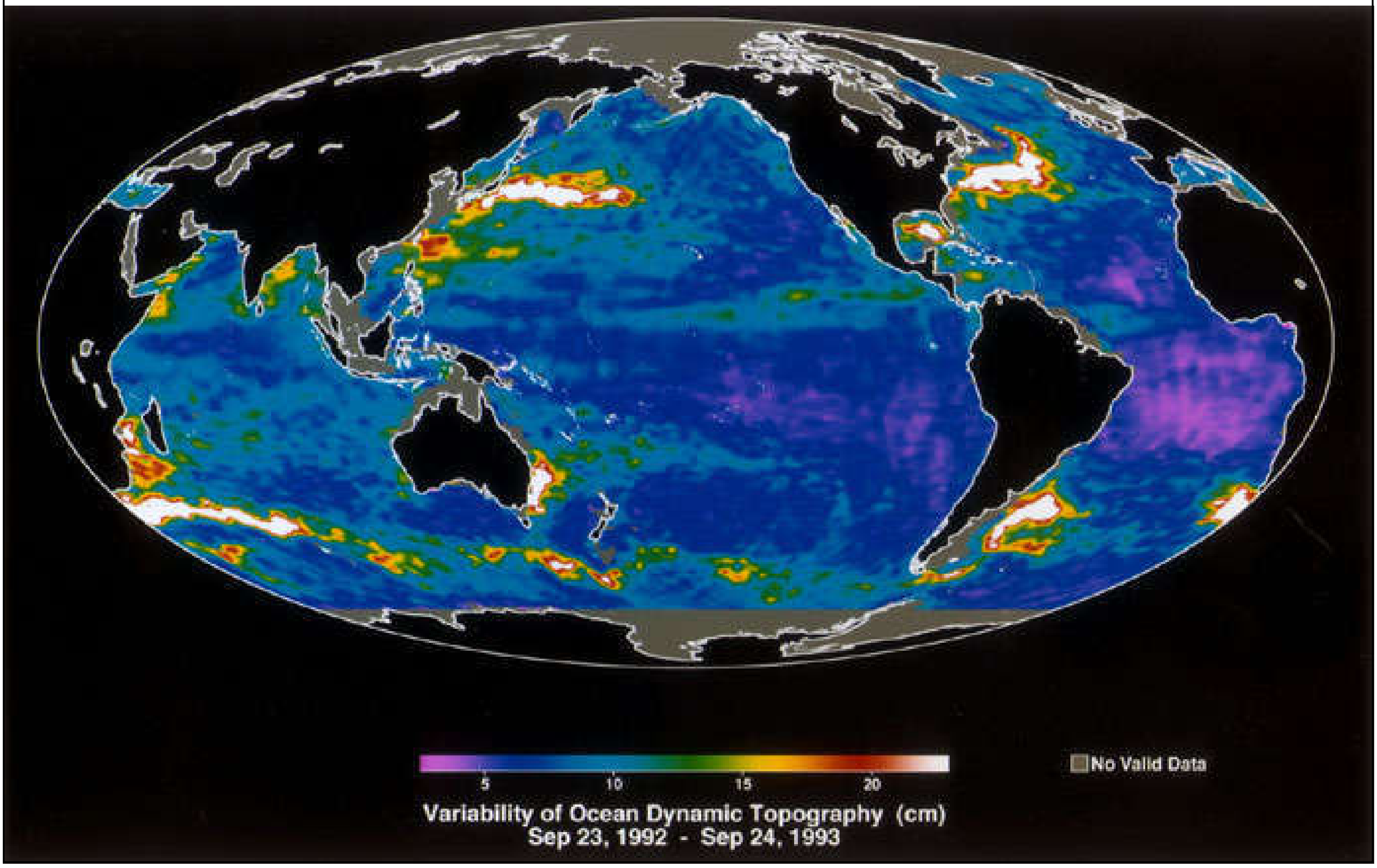
$$SST = H - N$$



Mean Sea Surface (2011)



MDT - Mean Dynamic Topography, (sprememba SST)



Zaključek - pomen določanja geoida

- Določanje geometrije površine Zemlje.
- Redukcija terestričnih geodetskih meritev na elipsoid.
  - Popravek, ki ga moramo upoštevati pri redukciji dolžine S (dolžine reducirano na ničelno nivojsko ploskev) na elipsoidno ploskev:

$$\delta S = -\frac{N}{R} S$$

  Splošno velja, da neupoštevanje vsakih 6,0 m geoidne višine povzroči relativni sistematični pogrešek velikosti 1 ppm (1×10^{-6}D), reducirane elipsoidne dolžine.
- Višinski datum za geodetsko izmero.
- Povezava terestrične izmere z meritvami opravljenimi s satelitskimi merskimi tehnikami $\Rightarrow$ transformacija koordinat.
- GNSS-višinomerstvo.
- Raziskave v geodinamiki in geofiziki.
- Oceanografske raziskave.