

Harmonična analiza

- ✘ Za prikaz gravitacijskega potenciala na površju Zemlje - krogle lahko uporabimo trigonometrične vrste (polinome).
- ✘ V splošnem: dano periodično funkcijo $f(t)$ s periodo T , aproksimiramo s trigonometričnim polinomom:

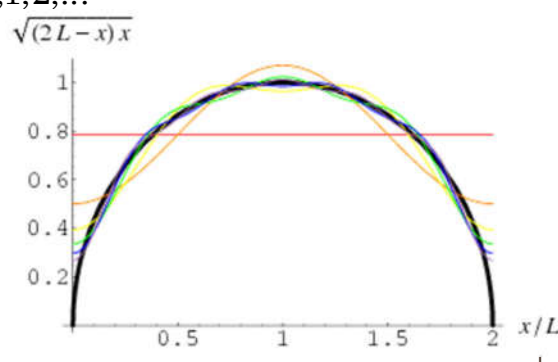
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

- + pri čemer so koeficienti a_0, a_k, b_k realni. Določanje koeficientov (Fourierovi koeficienti trigonometričnega polinoma), imenujemo **harmonična analiza**.
- ✘ Koeficiente lahko izračunamo:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \omega dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \omega dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

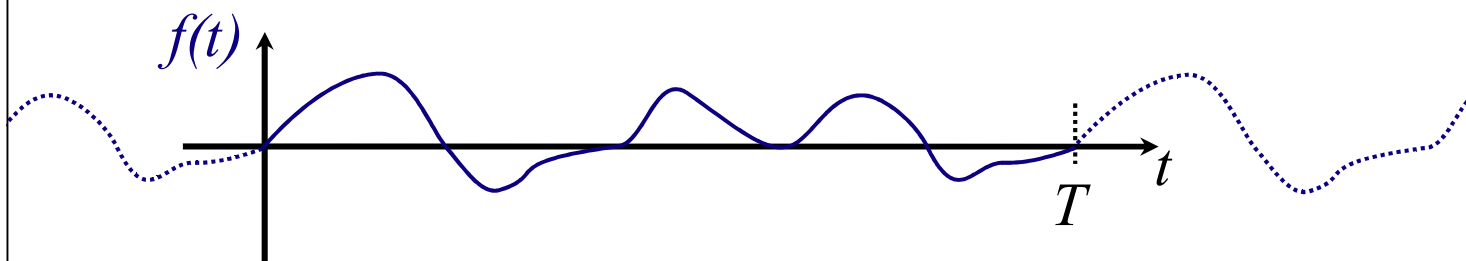
- + koeficient a_0 je povprečna vrednost f -je na območju:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$



M. Kuhar - Fizikalna geodezija

Fourierova vrsta (1)



$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) + b_k \sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right)$$

M. Kuhar - Fizikalna geodezija

Fourierova vrsta (2)

- ✘ Fourierovo vrsto razumemo kot razvoj nesinusnih periodičnih gibanj v čista sinusna nihanja. Namesto časovne slike nihanja si lahko predstavljamo tudi trenutno sliko valovne poteze.
- ✘ Tedaj imata vlogo časa t in krožne frekvence ω , koordinata x in valovno število $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Prostor

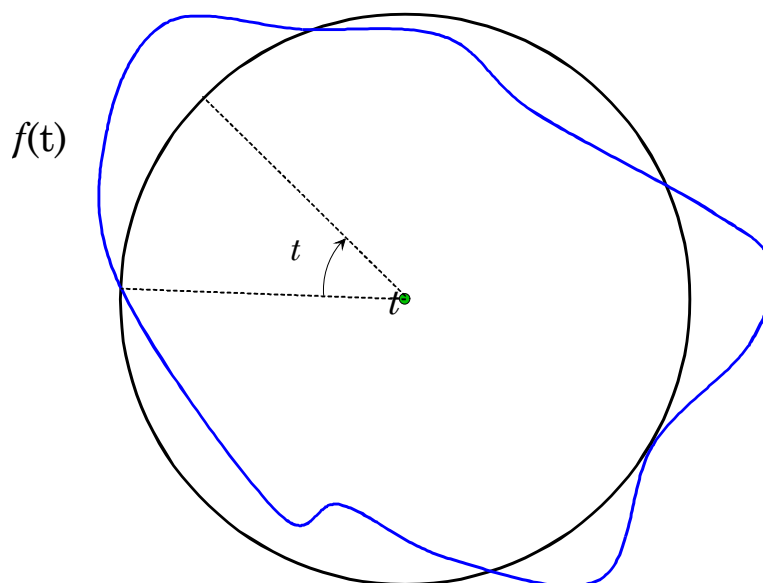
x	prostorska spremenljivka
k	valovno število
$F(k)$	spekter valovnega števila

Čas

t	časovna spremenljivka
T	perioda
f	frekvenca
ω	krožna frekvenca

Fourierova analiza (na krožnici)

- ✘ Ovijemo funkcijo okoli krožnice:

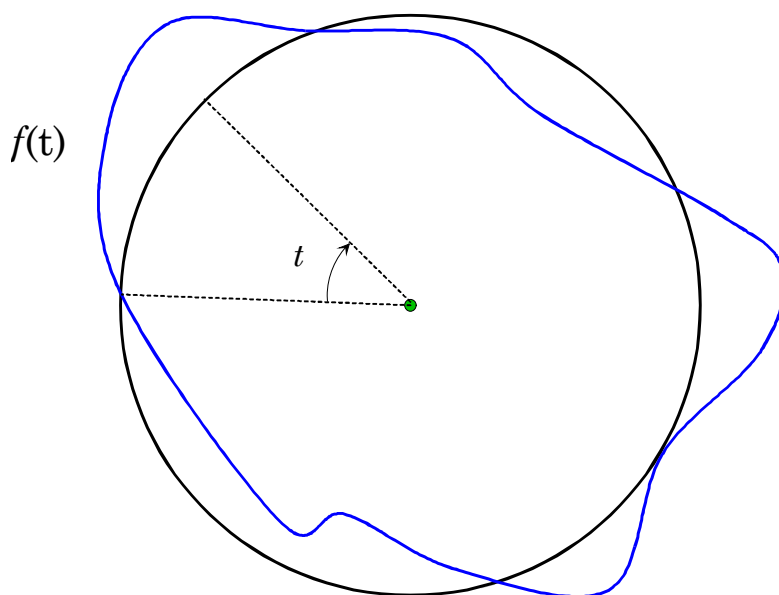


$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right)$$

Fourierova analiza (na krožnici)

✘ Ovijemo funkciju okoli krožnice:

$$t \rightarrow \lambda,$$
$$T \rightarrow 2\pi$$

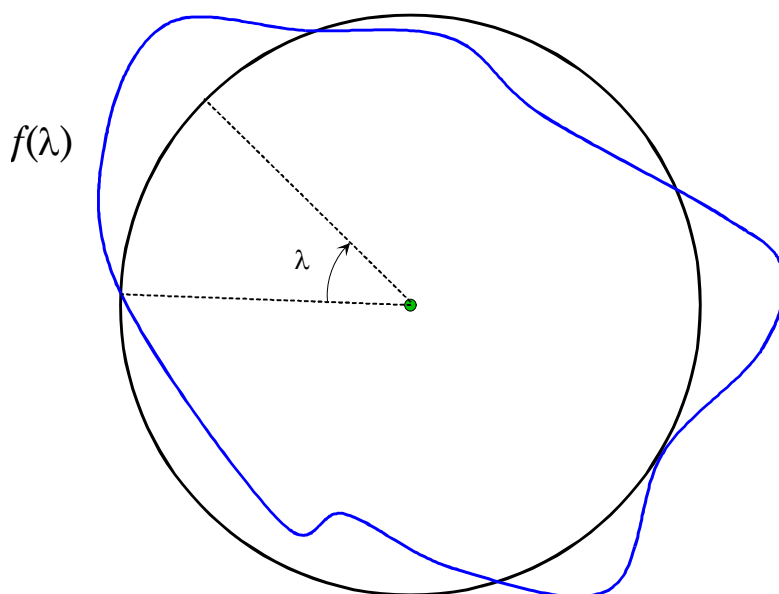


$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right)$$

Fourierova analiza (na krožnici)

✘ Ovijemo funkciju okoli krožnice:

$$t \rightarrow \lambda,$$
$$T \rightarrow 2\pi$$

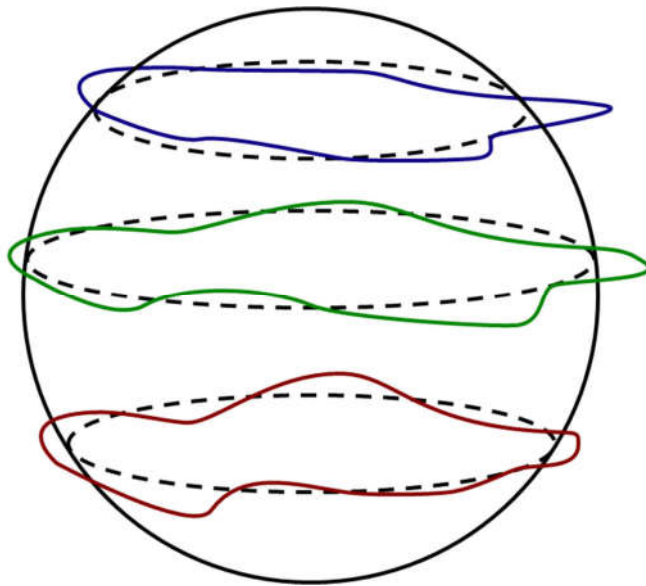


$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos(k\lambda) + b_k \sin(k\lambda) \right)$$

Fourierova (harmonična) analiza na krogli

✘ Obravnavamo kroglo:

$$f(\lambda) \rightarrow f(\theta, \lambda)$$



vsak koeficient postane funkcija polarnega kota θ ("colatitude"):

$$a_k \rightarrow a_k(\theta)$$

$$b_k \rightarrow b_k(\theta)$$

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k(\theta) \cos(k\lambda) + b_k(\theta) \sin(k\lambda))$$

Prikaz gravitacijskega potenciala s pomočjo sfernih funkcij

- ✘ Na krogli je Fourierova analiza na različnih geografskih širinah. Koeficiente a in b lahko izrazimo v funkciji polarnega kota (komplement širine).
- ✘ Laplaceovo diferencialno enačbo rešujemo v krogelnih koordinatah (r, θ, λ) :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0$$

Prikaz gravitacijskega potenciala s pomočjo sfernih funkcij

- ✘ Rešitev Laplaceove dif. enačbe sta dve neskončni vrsti oblike:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \lambda) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

- ✘ V inozemni geodetski literaturi se vrsti imenujeta prostorske sferne funkcije ("solid spherical harmonic", "raumliche Kugelfunktionen") reda n . Pri tem pa so funkcije $Y_n(\theta, \lambda)$ t.i. ploskovne (robne) sferne funkcije ("surface spherical harmonics", "Kugelflächfunktionen"). V domači matematični literaturi se izraz sferične (krogelne) funkcije uporablja samo za funkcije $Y_n(\theta, \lambda)$ (Križanič, 1993; Kuščer, Kodre, 1994)*.

Sferne (sferične) funkcije

- ✘ Vsako funkcijo, ki je harmonična znotraj območja določene krogle, lahko razvijemo v vrsto na levi in vsako funkcijo, ki je harmonična zunaj območja določene krogle, lahko razvijemo v vrsto na desni strani.

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\theta, \lambda) \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

- ✘ Sferne f-je (surface spherical harmonics) so Legendrove funkcije pomnožene s $\cos m\lambda$, in $\sin m\lambda$:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [a_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda]$$

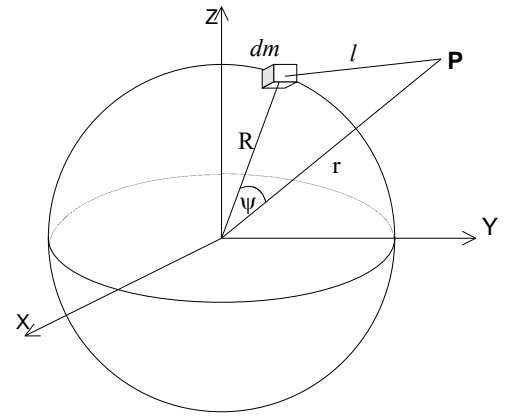
- ✘ Nas zanima predvsem vrsta na desni strani, saj je gravitacijski potencial harmonična f-ja zunaj Zemlje.

✘ Kako predstavimo grav. potencial s pomočjo sfernih funkcij?

✘ Recipročna razdalja $1/l$ se lahko predstavi v obliki vrste:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos\psi)$$

✘ $P_n(\cos\psi)$ je Legendrov polinom. Kot ψ je kot med krajevnim vektorjem točke P in elementom mase dm .



✘ Če to vrsto vstavimo v izraz za potencial v obliki prostorninskega integrala in vpeljemo krogelne koordinate (r, θ, λ) , dobimo potencial v obliki vrste sfernih funkcij (integral zamenjan s neskončno vrsto):

$$V = G \iiint_{\text{Zemlja}} \frac{dm}{l} = G \iiint_{\text{Zemlja}} \frac{\rho}{l} dv$$

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda)$$

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda)$$

✘ kjer so A_{nm} in B_{nm} , koeficienti razvoja sfernih funkcij, $P_{nm}(\cos\theta)$ so prirejene Legendrove funkcije I. vrste, stopnje n reda m ; r je (geocentrični) krajevni vektor obravnavane točke. Ta razvoj velja za točko zunaj Zemlje, kjer je potencial harmonična funkcija (zadošča Laplaceovo diferencialno enačbo).

✘ **Koeficienti razvoja so integrali mase Zemlje.**

✘ Prvi člen razvoja za stopnjo $n = 0$ je enak: $\frac{GM}{r}$

kar je dejansko srednja vrednost potenciala Zemlje.

✘ To je vrednost potenciala, če bi Zemlja bila krogla.

Predstavitev vrste

- ✘ Izpostavi se člen za stopnjo $n=0$ in vrsta se predstavi v obliki:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]$$

- ✘ V satelitski geodeziji so koeficienti vzeti z obratnim predznakom

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) \right]$$

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \right]$$

- ✘ pri tem so: M – skupna masa Zemlje in atmosfere, a – ekvatorialni radij Zemlje (velika polos geocentričnega zemljinega elipsoida; $a=R$).

Koeficienti razvoja so v naslednji medsebojni zvezi:

- ✘ $C_{nm} = A_{nm} / GMa^n$ $S_{nm} = B_{nm} / GMa^n$
- ✘ $J_{nm} = -A_{nm} / GMa^n$ $K_{nm} = -B_{nm} / GMa^n$

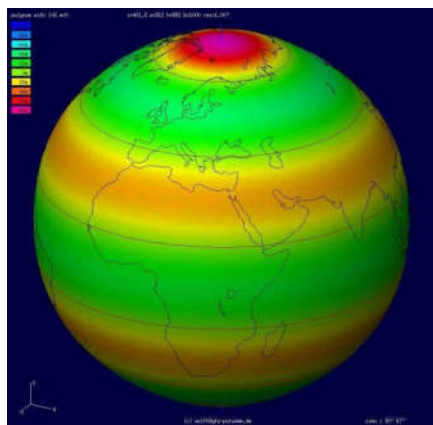
- ✘ Stalni člen GM/r (za $n = 0$) je srednja vrednost Zemljinega grav. potenciala. Ta bi nastopil če bi Zemlja bila krogla. Ostali členi (koeficienti) predstavljajo odstopanje potenciala od te srednje vrednosti.
- ✘ Koeficienti razvoja gravitacijskega potenciala v vrsto po sfernih funkcijah so integrali mase, oz. funkcije razporeditve mas Zemlje, njihova velikost je odvisna od razporeda mas znotraj zemlje (ki pa žal ni znana).

Koeficienti razvoja - sferni harmoniki geometrijski prikaz

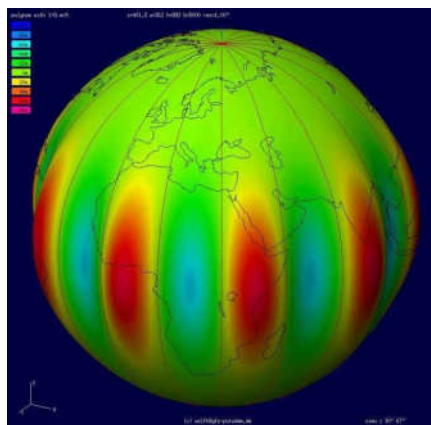
conski: $n=6, m=0$,

sektorski: $n=9, m=9$

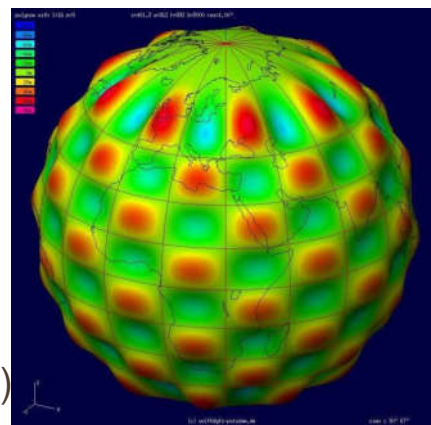
teseralni: $n=16, m=9$



(a)



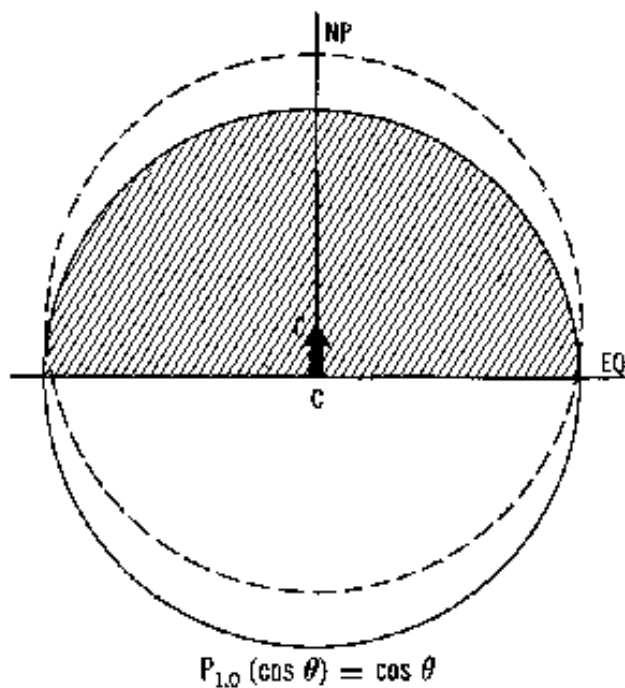
(b)



- ✘ Harmoniki za $m=0$ spreminjajo znak n -krat in niso odvisni od λ . Ti razdelijo kroglo na cone (*zone*), zato jim pravimo **conski harmoniki** (a).
- ✘ Prirejene Legendrove funkcije I. vrste spreminjajo znak $n-m$ -krat na intervalu $0 < \theta < \pi$. Funkcije $\cos m\lambda$ in $\sin m\lambda$ imajo $2m$ ničel na intervalu $0 < \lambda < 2\pi$. Geom. prikaz teh harmonikov za $m \neq 0$ je na sliki (c) → razdelijo kroglo na ploščice (kvadratne oblike) "tesera" (iz starogrške τέσσαρες téssares za 'štiri'), pravimo jim **teseralni harmoniki** (c).
- ✘ Za vrednosti $n = m$ se harmoniki spremenijo v funkcijo, ki razdeli kroglo na pozitivne in negativne sektorje → **sektorski harmoniki** (b).

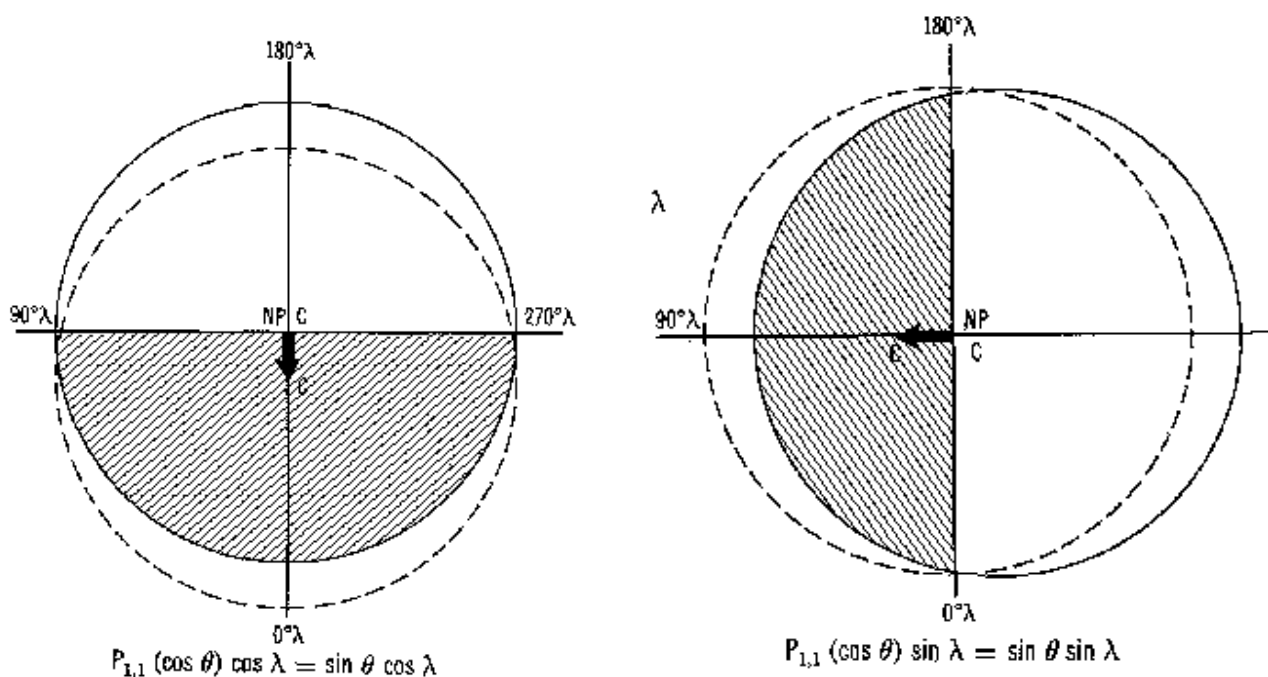
Fizikalna in geometrijska razlaga koeficientov razvoja

- ✘ Člen za $n=1, m=0$



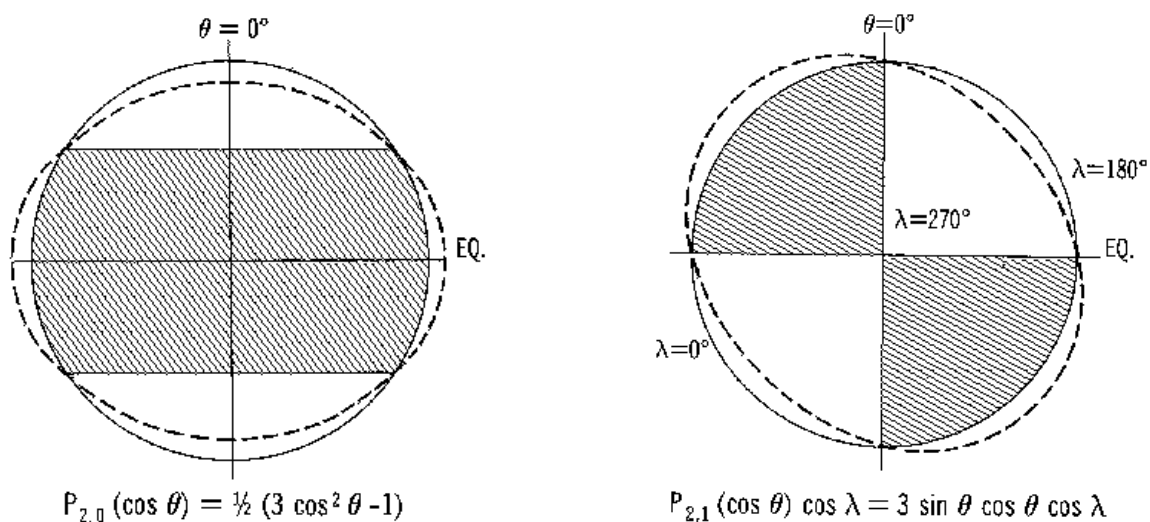
Fizikalna in geometrijska razlaga koeficientov razvoja

✘ Člena za $n = 1, m = 1$.



Fizikalna in geometrijska razlaga koeficientov razvoja

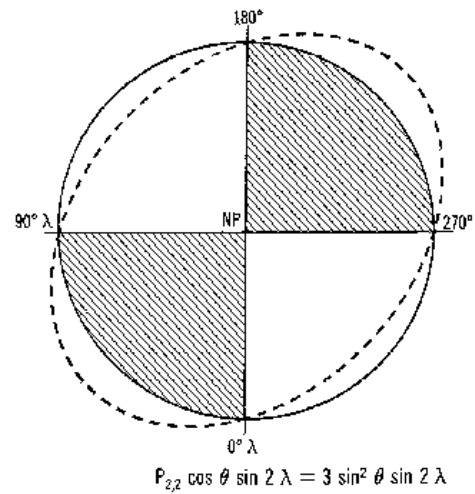
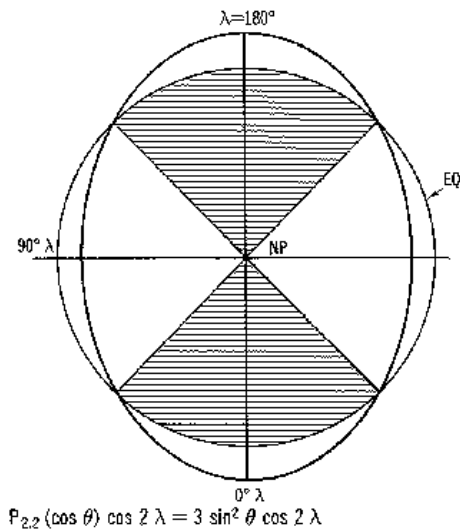
✘ Člena za $n = 2, m = 0$ in $n = 2, m = 1$.



✘ Koeficient C_{20} je stokrat večji od ostalih, saj tvori Zemljina sploščenost njeno največje odstopanje od krogle (vrednost $C_{20} = -0,00108263$).

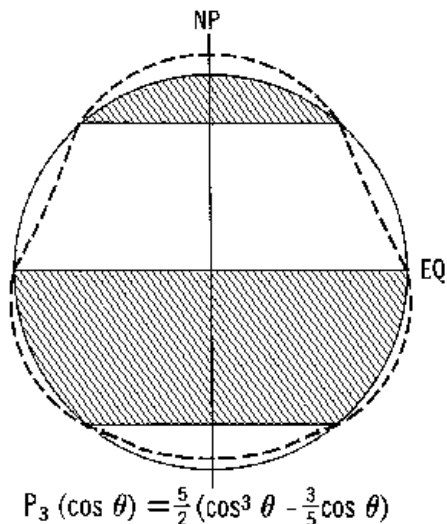
Fizikalna in geometrijska razlaga koeficientov razvoja

- ✘ Člena za $n=2, m=2$



Fizikalna in geometrijska razlaga koeficientov razvoja

- ✘ Stopnja $n = 3$:



- ✘ Prisotnost koeficienta C_{30} kaže, da Zemlja ima obliko hruške ("pear-shaped").

Fizikalna razlaga koeficientov razvoja

- ✘ V fizikalni razlagi koeficienti drugega reda vsebujejo vztrajnostne momente in centrifugalne vztrajnostne momente Zemlje glede na posamezne koordinatne osi (geocentričnega kartezičnega koordinatnega sistema).
- ✘ Vztrajnostni moment je geometrijska lastnost telesa, ki predstavlja sorazmernostni koeficient med navorom in kotnim pospeškom pri vrtenju okoli nepremične osi. Vztrajnostni moment (tudi masni vztrajnostni moment, za razliko od vztrajnostnega momenta ploskve) telesa je odvisen od njegove oblike in porazdelitve mase znotraj te oblike: več mase leži stran od osi vrtenja, večji je vztrajnostni moment.
- ✘ Za koeficiente razvoja $n = 0, 1, 2$ je dobro, da koordinatno izhodišče postavimo v središče Zemlje (kar pa je običajno).

Fizikalna razlaga koeficientov razvoja

- ✘ za $n = 0$: $A_{00} = G \iiint_{Zemlja} dm = GM$ $B_{00} = 0$
- ✘ za $n = 1$: $A_{10} = G \iiint_{Zemlja} z' dm$ $A_{11} = G \iiint_{Zemlja} x' dm$ $B_{11} = G \iiint_{Zemlja} y' dm$ $B_{10} = 0$
- ✘ Integrali, deljeni z maso M so koordinate **masnega središča Zemlje**:

$$\xi = \frac{1}{M} \iiint x' dm \quad \eta = \frac{1}{M} \iiint y' dm \quad \zeta = \frac{1}{M} \iiint z' dm$$

- ✘ V primeru geocentričnega koord. sistema, so koeficienti razvoja za $n = 1$ nič.

Fizikalna razlaga koeficientov razvoja

✘ Razvoj za $n = 2$:
$$A_{20} = \frac{G}{2} \iiint_{\text{Zemlja}} (2z'^2 - x'^2 - y'^2) dm \quad A_{21} = G \iiint_{\text{Zemlja}} x' z' dm$$

$$B_{21} = G \iiint_{\text{Zemlja}} y' z' dm \quad A_{22} = \frac{G}{4} \iiint_{\text{Zemlja}} (x'^2 - y'^2) dm \quad B_{22} = \frac{G}{2} \iiint_{\text{Zemlja}} x' y' dm$$

- ✘ Zgornji integrali vsebujejo **vztrajnostne momente** Zemlje na posamezne koordinatne osi:

$$A = \iiint (y'^2 + z'^2) dm \quad B = \iiint (x'^2 + z'^2) dm \quad C = \iiint (x'^2 + y'^2) dm$$

- ✘ in **centrifugalne vztrajnostne momente** (v mehaniki so ti tudi znani kot **deviacijski vztrajnostni momenti**):

$$D = \iiint x' y' dm \quad E = \iiint y' z' dm \quad F = \iiint x' z' dm$$

- ✘ Centrifugalni vztrajnostni momenti so nič, če se koordinatne osi ujemajo z glavnimi vztrajnostnimi osmi telesa.

Fizikalna razlaga koeficientov razvoja

- ✘ Z-os našega geocentričnega koordinatnega sistema sovpada s srednjo rotacijsko osjo Zemlje (pri tem zanemarimo premikanje Zemljinih polov). Le-ta pa se ujema z najdaljšo glavno vztrajnostno osjo (določa smer vrtilne osi telesa).
- ✘ Ta se ujema z najdaljšo glavno vztrajnostno osjo (določa smer vrtilne osi telesa), torej sta E in F enaka nič. Od tod sledi, da sta tudi koeficienta A_{21} in B_{21} enaka nič.
- ✘ B_{22} je sorazmeren prvemu centrifugalnemu vztrajnostnemu momentu; postal bi nič samo, če bi Zemlja imela popolno rotacijsko simetrijo, ali pa bi bila glavna vztrajnostna os v smeri Greenwiškega meridiana.
- ✘ Z uvedenimi predpostavkami, postane koordinatni sistem koaksialen z osnovnim vztrajnostnim elipsoidom, t.j. sistem postane t.i. **naravni geocentrični koordinatni sistem**.

Koeficienti razvoja

- ✘ $A_{00} = GM$
- ✘ $A_{10} = A_{11} = B_{10} = B_{11} = 0$
- ✘ $A_{20} = G\left(\frac{A+B}{2} - C\right)$
- ✘ $A_{21} = B_{21} = 0$
- ✘ $A_{22} = (G/4)\times(B - A) \quad B_{22} = (G/2)\times D.$
- ✘ Koeficienta A_{22} (J_{22}) in B_{22} (K_{22}) predstavljata odstopanje razporeditve mas Zemlje od njene rotacijske simetrije (t.i. eliptičnost ekvatorja).

Koeficient razvoja A_{20} oz. J_2

- ✘ Koeficient A_{20} (v obliki J_2) določa sploščenost Zemlje (razlika med srednjim ekvatorskim vztrajnostnima momentoma $A \approx B$ in polarnim vztrajnostnim momentom); negativen je kar pomeni, da obstaja višek mas v okolici ekvatorja oz. primanjkljaj mas na polih.
- ✘ Takšna razporeditev mas nam govori, da je Zemlje sploščena na polih. Večji je ostalih koeficientov 100-krat, kar kaže na njegovo pomembnost. Znan je tudi pod imenom "**dynamical form factor**" (je eden od definicijskih parametrov geodetskih referenčnih sistemov). Točno se J_2 glasi:
$$J_2 = \frac{1}{a^2 M} \left(\frac{A+B}{2} - C \right)$$
- ✘ Za geodetski referenčni sistem GRS 80, ki je skoraj identičen s sistemom WGS-84, znaša vrednost $J_{20} = 1082,7 \times 10^{-6}$.

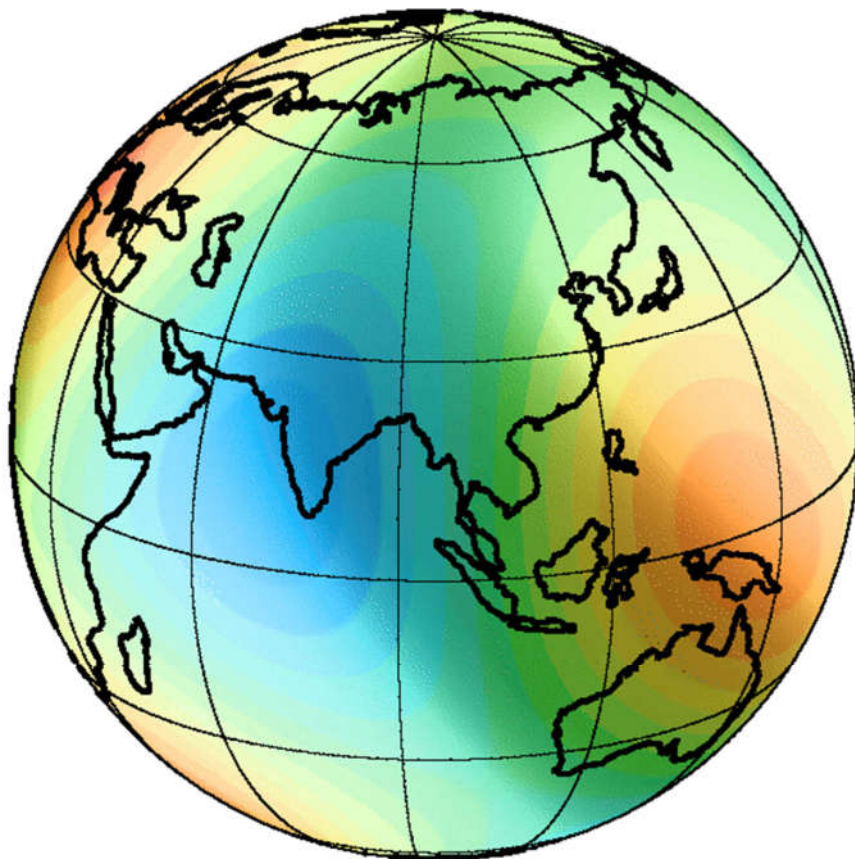
Globalni geopotencialni model (GGM)

- ✘ Zakaj sploh potrebujemo razvoj potenciala v vrsto po sfernih funkcijah?
- ✘ Lažje je določiti neznane koeficiente razvoja, kot pa rešiti integral z neznano funkcijo razporeda gostote.
- ✘ Koeficiente razvoja lahko določimo na tri načine:
 - + iz robnih pogojev neke funkcije na površini Zemlje;
 - + iz opazovanj funkcionalov potenciala v prostoru zunaj Zemlje (podatke dobimo s pomočjo dinamične satelitske geodezije s sledenjem tirov gibanja umetnih zemljinih satelitov);
 - + teoretično bi jih lahko izračunali v primeru znane funkcije razporeda gostote.

GGM - stopnja in red razvoja

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} a_{nm} Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

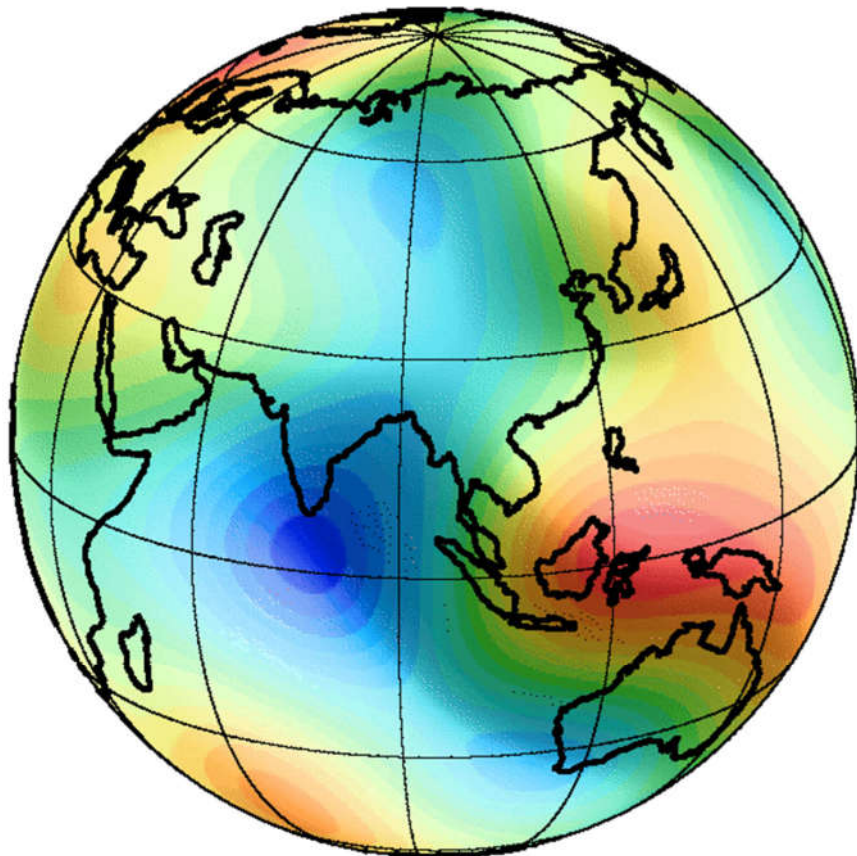
stopnja, red n, m	število koeficientov
4	25
8	81
16	289
30	961
60	3721
120	14641
240	58081



GGM - stopnja in red razvoja

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} a_{nm} Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

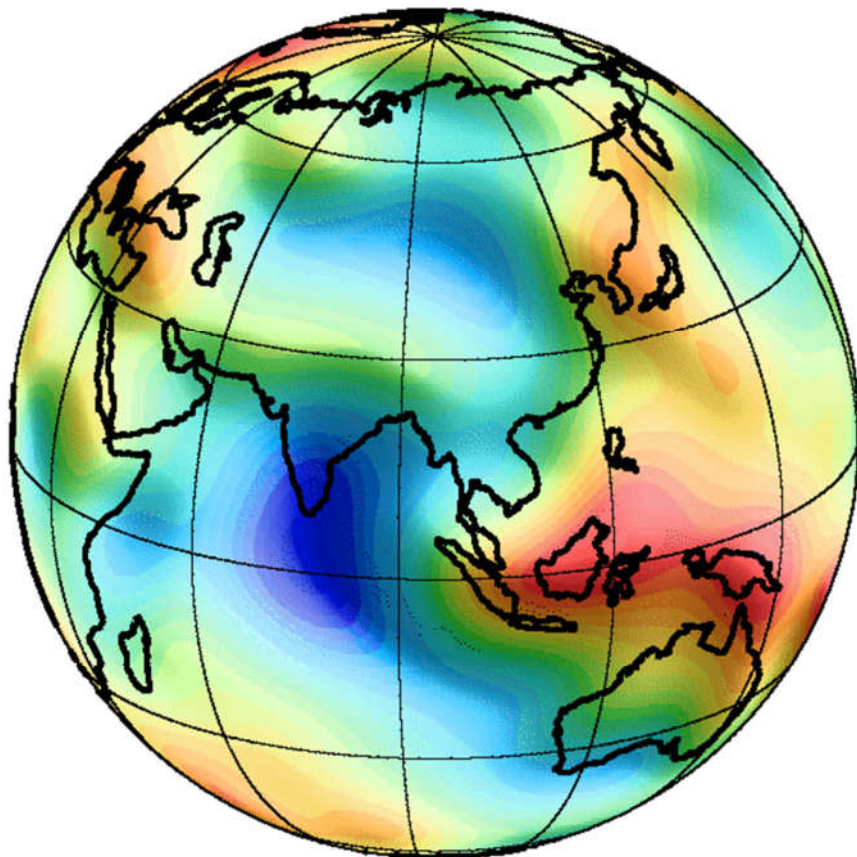
stopnja, red n, m	število koeficientov
4	25
8	81
16	289
30	961
60	3721
120	14641
240	58081



GGM - stopnja in red razvoja

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} a_{nm} Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

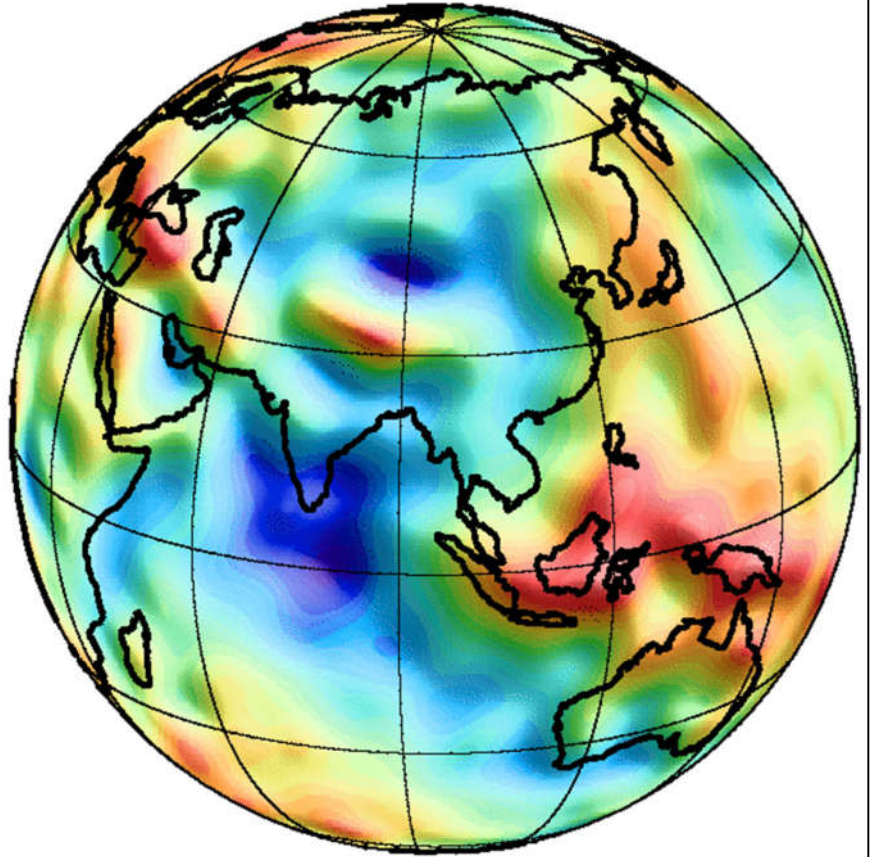
stopnja, red n, m	število koeficientov
4	25
8	81
16	289
30	961
60	3721
120	14641
240	58081



GGM - stopnja in red razvoja

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} a_{nm} Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

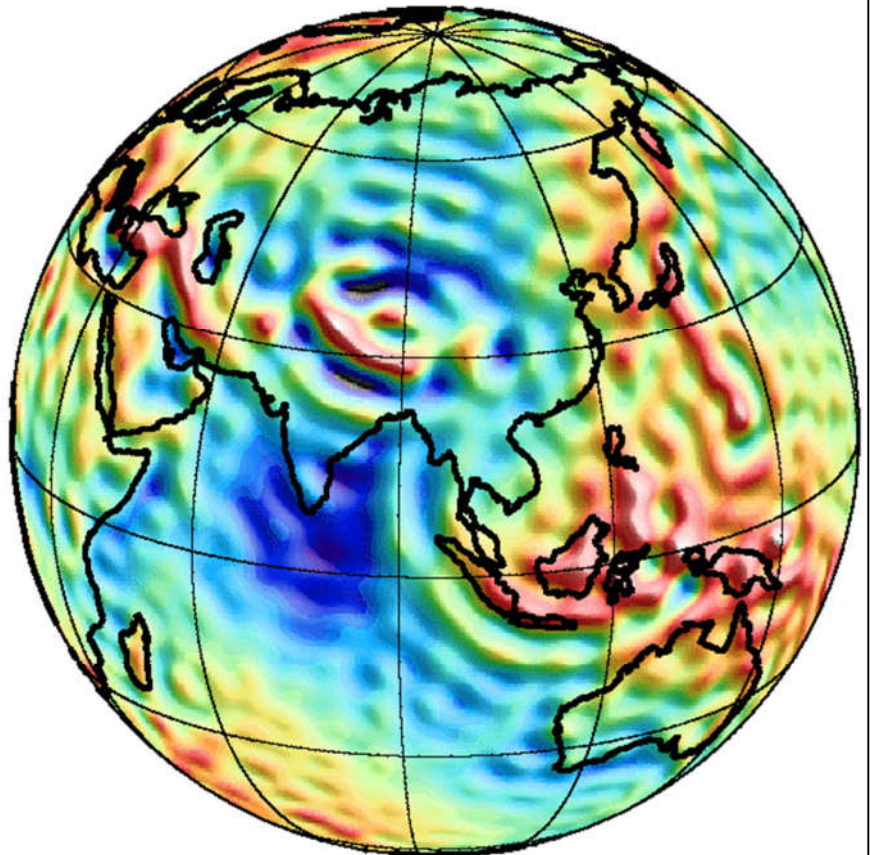
stopnja, red n, m	število koeficientov
4	25
8	81
16	289
30	961
60	3721
120	14641
240	58081



GGM - stopnja in red razvoja

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} a_{nm} Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

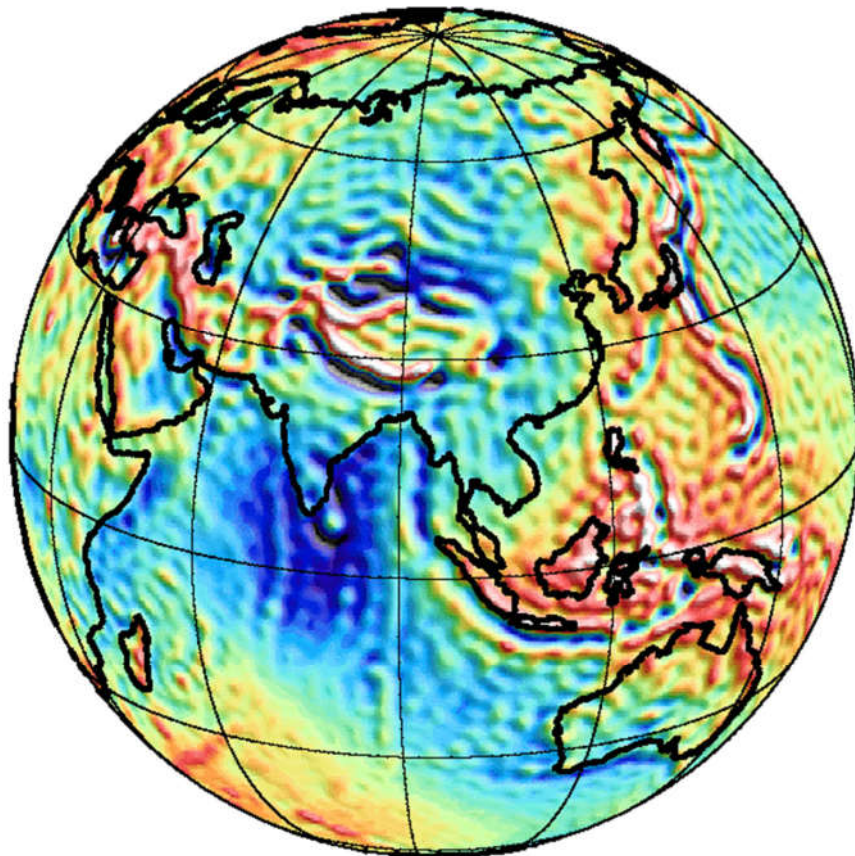
stopnja, red n, m	število koeficientov
4	25
8	81
16	289
30	961
60	3721
120	14641
240	58081



GGM - stopnja in red razvoja

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} a_{nm} Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

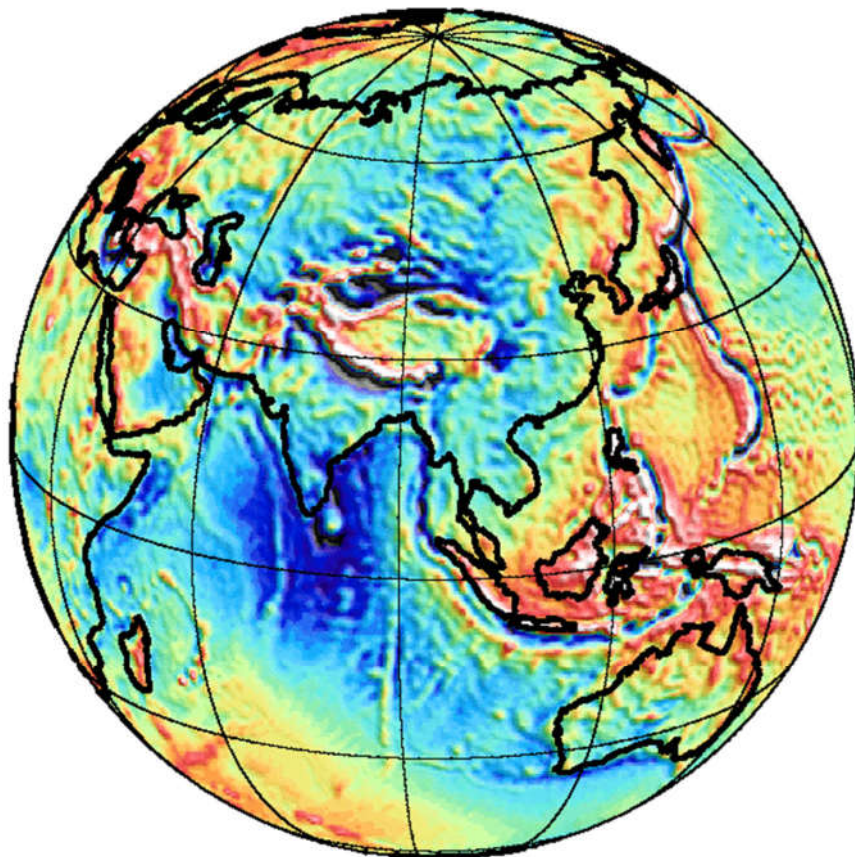
stopnja, red n, m	število koeficientov
4	25
8	81
16	289
30	961
60	3721
120	14641
240	58081

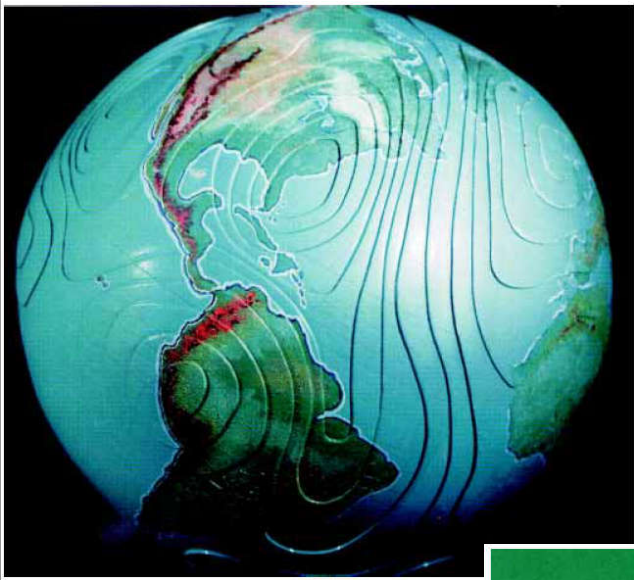


GGM - stopnja in red razvoja

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n+1} a_{nm} Y_{nm}(\lambda, \theta)$$

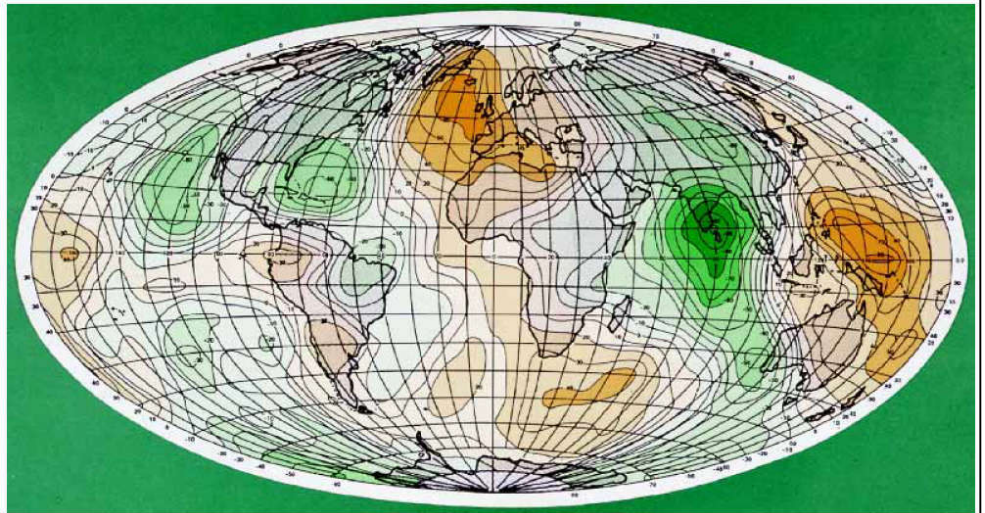
stopnja, red n, m	število koeficientov
4	25
8	81
16	289
30	961
60	3721
120	14641
240	58081





APL 5.0-1967

M. Kuhar - Fizikalna geodezija



NASA modeli

- GEM-3 (1972)
- GEM-4 (1973)
- GEM-5 (1974)
- GEM-6 (1974)
- GEM-7 (1976)
- GEM-8 (1976)
- GEM-9 (1977)
- GEM-10 (1977)
- GEM-10A (1978)
- GEM-10B (1978)
- GEM-L2 (1983)
- GEM-T1 (1987)
- GEM-T2 (1980)
- JGM-1S (1994)
- JGM-2 (1994)
- JGM-2G (1994)
- JGM-2S (1994)
- JGM-3 (1996)
- EGM96 (1998) to degree 70
- EGM96 (1998) to degree 360